Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Pierpaolo Esposito
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

Soluzioni Tutorato 8
14 Dicembre 2012

1. Determinare l'immagine del rettangolo:

$$R = \left\{ z = x + iy : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < 1 \right\}$$

tramite la trasformazione conforme $z \to e^{2iz}$.
SOLUZIONE:La mappa $f(z) = e^{2iz}$ é la composizione della trasformazione lineare $g(z = 2iz$ con la funzione esponenziale $h(w) = e^w$. L'effetto di g é di ruotare di un diangolo di $\frac{\pi}{2}$ e di dilatare di un fattore 2 (moltiplicazione per $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. Dunque g trasforma il rettangolo R nel rettangolo $R' = \{w = u + iv : -2 < u < 0, -\pi < v < \pi\}$.
La mappa esponenziale $w = u + iv \to g(w) = e^w = e^u e^{iv}$ trasforma segmenti di rette paralleli all'asse u (orizzontali, v fissato) in segmenti di semirette uscenti dall'origine (con argomento v), e segmenti di rette paralleli all'asse v (verticali, u fissato) in archi di circonferenze centrati nell'origine (con raggio e^u). L'insieme R' viene dunque trasformato nell'insieme dei punti che hanno argomento v, con $-\pi < v < \pi$ e che stanno sulle circonferenze di raggio e^u, con $-2 < u < 0$. Si tratta dell'insieme $S = \left\{ z = \rho e^{i\theta} : e^{-2} < \rho < 1, -\pi < \theta < \pi \right\} = \left\{ z : e^{-2} < |z| < 1, arg(z) \neq \pi \right\}$, che non é altro che la regione compresa tra le circonferenze centrate nell'origine di raggio e^{-2} e raggio 1 escluso il segmento di estremi -1 e $-e^{-2}$.

2. Si calcoli l'integrale:

$$\int_\gamma \frac{z}{\bar{z}} dz$$

dove $\gamma = D$ è il cammino chiuso che racchiude il dominio $D = \{z \in C : 1 < |z| < 2, Im(z) > 0\}$ percorso in senso antiorario.
SOLUZIONE:La curva é composta da 4 parti:

- la semicirconferenza di centro 0 e raggio 2 del semipiano superiore percorsa in senso antiorario, che possiamo parametrizzare con: $z_1(t) = 2e^{it}, a_1 = 0 \leq t \leq b_1 = \pi$, con derivata $z_1'(t) = 2ie^{it}$;

- il segmento di retta che va dal punto -2 al punto -1, che possiamo parametrizzare con: $z_2(t) = t, a_2 = -2 \leq t \leq b_2 = -1$, con derivata $z_2'(t) = 1$;

- la semicirconferenza di centro 0 e raggio 1 del semipiano superiore percorsa in senso orario, che possiamo parametrizzare con: $z_3(t) = e{-}it, a_3 = -\pi \leq t \leq b_3 = 0$, con derivata $z_3'(t) = -ie^{-it}$;

- il segmento di retta che va dal punto 1 al punto 2, che possiamo parametrizzare con: $z_4(t) = t, a_4 = 1 \leq t \leq b_4 = 2$, con derivata $z_4'(t) = 1$.

L'integrale si calcola facilmente:

$$\int_\gamma \frac{z}{\overline{z}} dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{a_k}^{b_k} \frac{z_k(t)}{\overline{z}_k(t)} dt = \int_0^\pi \frac{2e^{it}}{2e^{-it}} 2ie^{it} dt + \int_{-2}^{-1} \frac{t}{t} dt + \int_{-\pi}^{0} \frac{e^{-it}}{e^{it}} (-i) e^{-it} dt + \int_1^2 \frac{t}{t} dt =$$

$$= 2i \int_0^\pi e^{3it} dt + \int_{-2}^{-1} dt - i \int_{-\pi}^{0} e^{-3it} dt + \int_1^2 dt = 2i \left[\frac{e^{3it}}{3i}\right]_0^\pi + [t]_{-2}^{-1} - i \left[\frac{e^{-3it}}{-3i}\right]_{-\pi}^{0} + [t]_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3}(e^{3i\pi} - 1) + ((-1) - (-2)) + \frac{1}{3}(1 - e^{3i\pi}) + (2 - 1) = -\frac{4}{3} + 1 + \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

3. Si consideri la funzione:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} + \frac{1}{(1-z)^2}$$

Si determinino i due sviluppi in serie di Laurent della f con centro in $z = 0$ e validi, rispettivamente, sui domini $0 < |z| < 1$ e $|z| > 1$.
SOLUZIONE:La funzione $e^{\frac{1}{z}}$ é olomorfa per $z \neq 0$ e dunque ammette uno sviluppo di Laurent valido per $|z| > 0$ che si ottiene ricordando la definizione della funzione esponenziale:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

La funzione $\frac{1}{(1-z)^2}$ é la derivata della funzione $\frac{1}{1-z}$. Lo sviluppo di Laurent per $\frac{1}{1-z}$ valido nella regione $|z| < 1$ é dato dalla serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.Derivando la serie termine a termine troviamo che lo sviluppo per $\frac{1}{(1-z)^2}$ é $\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}$.Otteniamo allora che nella regione $0 < |z| < 1$ vale lo sviluppo:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} + \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n.$$

Lo sviluppo di Laurent per $\frac{1}{1-z} = -(\frac{1}{z}\frac{1}{1-(\frac{1}{z})})$ valido nella regione $|z| > 1$ é dato da $-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{z})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-(n+1)}$. Derivando la serie termine a termine troviamo che lo sviluppo per $\frac{1}{(1-z)^2}$ é $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^{-(n+2)}$. Otteniamo allora che nella regione $|z| > 1$ vale lo sviluppo:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} + \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^{-(n+2)}.$$

4. Sia $a \in \mathbb{R}$. Si calcolino i valori del residuo della funzione:
$$f(z) = \frac{e^{az}}{(e^z+1)(e^{z-1}+1)}$$
nei punti $z = \pi i$ e $z = 1 + \pi i$.
SOLUZIONE:Nei punti $z = i\pi$ e $z = 1 + i\pi$ si tratta di poli semplici. Infatti, $e^z + 1$ ha uno zero semplice in $z = i\pi$ in quanto:
$e^{i\pi} + 1 = 0, \frac{\partial}{\partial z}|_{z=i\pi}(e^z + 1) = e^{i\pi} = -1 \neq 0$.
Per calcolare il residuo di f in $i\pi$ ci basta calcolare:
$Res(f, i\pi) = \frac{e^{az}}{e^z(e^{z-1}+1)+e^{z-1}(e^z+1)}|_{z=i\pi} = \frac{e^{ai\pi}}{e^{-1}-1}$;
Per calcolare il residuo di f in $1 + i\pi$ ci basta calcolare:
$Res(f, 1 + i\pi) = \frac{e^{az}}{e^z(e^{z-1}+1)+e^{z-1}(e^z+1)}|_{z=1+i\pi} = \frac{e^a e^{ai\pi}}{e-1}$.

5. Svolgere i seguenti integrali:
(a) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + sin^2(x)}$;
RISULTATO:$\sqrt{2}\pi$
(b) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + sinx + cosx}$;
RISULTATO:$\sqrt{2}\pi$
(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$;
RISULTATO:$\frac{2}{3}\pi$
(d) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2(x^2+9)} dx$;
RISULTATO:$\frac{\pi}{200}$
(e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sinx}{x(1+x^2)} dx$.
RISULTATO:$\frac{\pi(e-1)}{2}$.

6. Studiare i diversi sviluppi di Laurent per la funzione $f(z) = \dfrac{z+1}{(z+2)(z-1)}$ di punto iniziale $z = 0$. SOLUZIONE:Scomponendo $f(z)$ in frazioni semplici, si ha
$f(z) = \frac{1}{3}\frac{1}{z+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-1}$
in $|z| < 1$ abbiamo che:
$\frac{1}{3}\frac{1}{z+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-1} = \dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.
in $1 < |z| < 2$ abbiamo che:
$$\frac{1}{3}\frac{1}{z+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}.$$
in $|z| > 2$ abbiamo che:
$$\frac{1}{3}\frac{1}{z+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{z-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{z^{n+1}} + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}.$$

7. Sviluppare in serie di Laurent la funzione: $f(z) = \dfrac{z}{4z^2+1}$ nei domini:

   (a) $|z| > 1/2$;
   (b) $|z| < 1/2$;
   (c) $|z - \frac{i}{2}| < 1$.

   SOLUZIONE: Se $|z| > \frac{1}{2}$ avremo $f(z) = \dfrac{z}{4z^2+1} = \dfrac{z}{4z^2}\dfrac{1}{1+\frac{1}{4z^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^{-2n-1}$;

   Se $|z| < \frac{1}{2}$, allora avremo $f(z) = \dfrac{z}{4z^2+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n z^{2n+1}$;

   Il punto$z = \frac{i}{2}$ é un polo del primo ordine. Dobbiamo quindi imporre $|z - \frac{i}{2}| > 0$. Notiamo che possiamo fattorizzare la funzione $f(z)$ nella forma:
   $f(z) = z\dfrac{1}{z-\frac{i}{2}}\dfrac{1}{z+\frac{i}{2}}$
   Dato che il dominio in cui dobbiamo sviluppare $f(z)$ é un cerchio centrato in $z = \frac{i}{2}$, dobbiamo scrivere la serie in potenze di $z - \frac{i}{2}$. Sviluppiamo ognuno dei tre fattori singolarmente:
   $z = (z - \frac{i}{2}) + \frac{i}{2}$.
   Il secondo fattore é giá nella forma voluta. Per quanto riguarda il terzo, ci riconduciamo nuovamente alla somma della serie geometrica:
   $\dfrac{1}{z+\frac{i}{2}} = \dfrac{-i}{1-i(z-\frac{i}{2})} = -i\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} i^n(\frac{z-i}{2})^n$
   $|i(\frac{z-i}{2})| = |\frac{z-i}{2}| < 1$.
   Quindi: $f(z) = ((z - \dfrac{i}{2}) + \dfrac{i}{2})\dfrac{1}{z-\frac{i}{2}}(-i\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} i^n(z-\frac{i}{2})^n) = \frac{1}{2}\frac{1}{(z-\frac{i}{2})} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{2}(z-\frac{i}{2})^n$.

8. Determinare i coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent nell'intorno di $z = 1$ della funzione:

   $$f(z) = \frac{z sin\left(\frac{z\pi}{2}\right)}{z-1}$$

   Dire in quale regione del piano complesso lo sviluppo converge e calcolare l'integrale:

   $$\int_C f(z)dz$$

   essendo C la circonferenza di centro $z = 1$ e raggio $R = 2$.
   SOLUZIONE:$f(z)$ ha come unica singolaritá al finito il punto $z = 1$. Il suo sviluppo di Laurent converge quindi in tutto il piano complesso aperto ad eccezione del punto $z_0 = 1$, ossia nella regione $|z-1| > 0$.Dobbiamo scrivere $f(z)$ come una serie di potenze in $z - 1$. Notiamo che il termine $(z-1)^{-1}$ é giá nella forma desiderata. Lo sviluppo di Taylor di z nel punto $z_0 = 1$ dato da:
   $z = 1 + (z-1)$
   Abbiamo quindi:
   $f(z) = \frac{1}{z-1}(1 + (z-1))sin\left[\frac{(z-1)\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right]$.
   D'altra parte
   $sin\left[\dfrac{(z-1)\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right] = cos\left[\dfrac{(z-1)\pi}{2}\right] = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}\frac{1}{2n!}(z-1)^{2n}$.

In conclusione, per $|z-1|>0$:

$f(z) = (1 + \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}\frac{1}{2n!}(z-1)^{2n} = \sum_{n=-1} c_n(z-1)^n.$

$c_n = \begin{cases} (\frac{\pi}{2})^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}, & \text{se } n \text{ dispari} \\ (\frac{\pi}{2})^{n}\frac{1}{(n)!}, & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}.$

Poiché il coefficiente c_{-1} dello sviluppo di Laurent di $f(z)$ vale 1, per il teorema dei residui si avremo:

$\oint_C \frac{zsin\left(\frac{z\pi}{2}\right)}{z-1}dz = 2i\pi Res_{z=0}\left(\frac{zsin\left(\frac{z\pi}{2}\right)}{z-1}\right) = 2i\pi c_{-1} = 2i\pi$